

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI
BOLOGNA

FACOLTÀ DI SCIENZE MATEMATICHE, FISICHE E NATURALI
Corso di Laurea Triennale in Matematica

**SULLA NOZIONE
DI
DISTRIBUZIONE**

Tesi di Laurea in Analisi Matematica

Relatore:
Chiar.mo Prof.
Ermanno Lanconelli

Presentata da:
Roberta Censi

Sessione II
Anno Accademico 2009-2010

Alle mie FAMIGLIE

"Affermo che nessuna scienza mi sembra più utile e più bella della matematica. Ed invero: quale altra scienza si occupa di verità più elementari, poiché essa non ne presuppone alcun'altra, mentre ogni altra presuppone la matematica? In quale altra meglio risplende lo splendore del vero? Quale altra fornisce cognizioni tanto universali nel tempo e nello spazio? La matematica è universalmente utile, oltre e forse più per la verità che essa fa conoscere, per i metodi di ricerca che essa adopera ed adoperando insegna. Nessun altro studio richiede meditazione più pacata: nessun altro meglio induce ad essere cauti nell'affermare, semplici ed ordinati nell'argomentare, precisi e chiari nel dire."

A. PADOA, (1868-1937), *"Elogio alla matematica"*

Introduzione

"L'analisi matematica è estesa quanto la natura stessa."

J. Fourier

Quanto è importante la nozione di funzione per la matematica e in particolare per l'analisi? Moltissimo.

L'idea alla base di questo elaborato è nata dalla curiosità di scoprire come e quanto un singolo strumento matematico possa influire sulla matematica stessa. Uno degli strumenti più importanti e basilari dell'analisi matematica è il concetto di funzione, dunque, in questa tesi, si vuole approfondire questa nozione a partire storicamente dalla faticosa nascita della sua definizione, fino, in particolare attraverso lo studio della 'funzione' delta di Dirac, alla sua generalizzazione con la teoria delle distribuzioni di Schwartz e alle sue applicazioni in ambito fisico.

Nello specifico nel primo capitolo, *"Funzione: un excursus storico"*, si parlerà esclusivamente da un punto di vista storico della funzione, di chi tentò di trovare una sua definizione appropriata e generalmente valida e di come e perchè è nata la teoria delle distribuzioni. In particolare si tratterà dell'evoluzione del concetto di funzione, a partire dalla visione di funzione come un qualcosa legato esclusivamente allo studio di curve fino alla funzione come relazione di elementi e alla nascita della teoria delle distribuzioni.

Nel secondo, *"Le funzioni singolari"*, si espone come esempio significativo il caso della 'funzione' delta di Dirac e si vede come, passaggio per passaggio, sebbene questa non sia una funzione nel senso usuale del termine, possa es-

sere considerata una distribuzione: una funzione generalizzata.

Il terzo capitolo, *"L'equazione della corda vibrante"*, analizza, nello specifico, il dibattito avvenuto a fine settecento tra Eulero e d'Alembert relativo alla ricerca dell'equazione della corda vibrante. In particolar modo si effettua un parallelismo tra i due procedimenti adottati da questi due grandi matematici soffermandosi su quella che è la differenza fondamentale per Eulero: considerare anche le funzioni 'discontinue' come possibili stati iniziali della corda. Fino ad arrivare all'acuta osservazione di Lagrange: "la soluzione trovata richiede meno regolarità delle funzioni", che contribuì ad un'ulteriore generalizzazione dell'analisi e, in particolare, del concetto di funzione. Infine, il quarto, *"La teoria delle distribuzioni"*, espone la teoria, così come Schwartz l'aveva proposta nel 1951–1952. In particolare ci si sofferma sulla derivazione di distribuzioni e sulla ricerca delle primitive.

Indice

Introduzione	i
1 Funzione: un excursus storico	1
1.1 La nozione di funzione	1
1.2 La nascita della teoria delle distribuzioni	4
2 Le funzioni singolari	7
2.1 La delta di Dirac e le distribuzioni regolari	7
2.2 La delta di Dirac come limite di distribuzioni regolari	11
3 L'equazione della corda vibrante e le distribuzioni	17
3.1 I primi studi sull'equazione della corda vibrante	17
3.2 La soluzione di d'Alembert	18
3.3 La risposta di Eulero	21
3.4 L'equazione della corda vibrante oggi	22
3.5 La soluzione di d'Alembert è una soluzione debole	25
4 La teoria delle distribuzioni di Schwartz	31
4.1 Proprietà e nozioni elementari delle distribuzioni	31
4.2 Derivata di una distribuzione	37
4.3 Primitiva di una distribuzione	43
Conclusioni	49
Bibliografia	51

Capitolo 1

Funzione: un excursus storico

1.1 La nozione di funzione

Il concetto di funzione nel senso attuale del termine è il risultato del lavoro di molti matematici nel corso di secoli. Le prime definizioni appaiono ufficialmente con Leibniz (1646-1727), nell'opera *"Nova methodus pro maximis et minimis itemque tangentibus, qua nec irrationales quantitates moratur"* e con Newton (1642-1727) che aveva parlato di funzione chiamandola però in modo differente: "fluente". Queste definizioni, legate allo studio di curve, erano utilizzate per denotare una quantità strettamente collegata alla curva, come la pendenza o un suo specifico punto. Infatti, sebbene queste curve vengano descritte da proporzioni non sono guardate come grafici rappresentanti delle relazioni, ma semplicemente considerate per quello che appaiono, cioè come oggetti geometrici o traiettorie di punti in movimento. Successivamente nel 1714 Leibniz definì la funzione proprio come una quantità che dipende da una variabile, continuando a dare una visione della funzione come espressione analitica (oggi il concetto di funzione di Leibniz si avvicina invece maggiormente a quello di funzione differenziabile).

Nel 1718 Bernoulli scrisse:

"Una funzione di una quantità variabile è una quantità composta in un modo qualsiasi con questa variabile e con quantità costanti."

Definendo in questo modo la funzione si mette in risalto l'arbitrarietà della composizione delle operazioni tra variabili e costanti. Confrontando la definizione precedente con quella data da Eulero all'incirca nel 1748:

”Una funzione di una quantità variabile è un'espressione analitica composta in modo qualsiasi da questa quantità e da numeri o costanti”

si vede come, per Bernoulli, una funzione è una quantità, mentre per Eulero è una espressione analitica. Il passaggio tra le due definizioni è segno dello spostamento dell'attenzione dal risultato al processo. In particolar modo la discussione attorno al concetto di funzione diventa centrale in una questione di carattere fisico-matematico, quella della corda vibrante: studiare le vibrazioni di una corda in un piano. Riguardo a questo argomento si accese una vera e propria polemica: nel 1747 d'Alembert pubblicò un lavoro che può essere visto come il primo tentativo di integrare le equazioni alle derivate parziali che si ottengono descrivendo matematicamente le infinite forme assunte da una corda tesa. Si creò un dibattito che portò, grazie anche al contributo di studiosi come Lacroix, Condorcet e Fourier, ad una estensione del concetto di funzione euleriana a scapito di quello proposto da Bernoulli. Si tenta di superare la concezione legata al processo, al calcolo della nozione di funzione, giungendo ad abbandonare l'idea che una funzione debba necessariamente essere una espressione analitica o una formula che lega tra loro due variabili. Si arriva così alla definizione proposta nel 1829 da Dirichlet:

”Una variabile y si dice funzione della variabile x in un certo intervallo, quando esiste una legge, di natura qualsiasi, la quale faccia corrispondere a ogni valore dato alla x un valore e uno solo per la y . Allora si dice che y è funzione della variabile indipendente x .”

Si viene a spezzare così il collegamento funzione-processo di calcolo a vantaggio di una visione relazionale più ampia che include le funzioni continue

e non ovunque derivabili o funzioni che non possono essere rappresentate da una curva disegnata a mano libera. Verso la fine del *XIX* secolo inizia la cosiddetta "Età del rigore", in altre parole, si comincia a formalizzare l'intera matematica servendosi della teoria degli insiemi e si vede come la definizione di funzione data da Dirichlet presenti una affinità con l'idea moderna di corrispondenza tra due insiemi di numeri. Dedekind nel 1887 introduce la moderna nomenclatura e la concezione di funzione come trasformazione agente su un insieme astratto:

"Per trasformazione ϕ di un sistema S intendiamo una legge attraverso cui per ciascun definito elemento di s di un sistema si determina una cosa completamente definita detta immagine di s e denotata con un simbolo $\phi(s)$; la stessa situazione può essere espressa in vari modi: $\phi(s)$ corrisponde all'elemento s , o $\phi(s)$ si ottiene da s per mezzo della trasformazione ϕ , oppure s va in $\phi(s)$ per mezzo della trasformazione ϕ . "

Una definizione più generale nasce con Bourbaki, nome che in realtà è un pseudonimo che indica a partire dal 1935 un gruppo di matematici, tra i quali Henri Cartan, Del Sarte, Dieudonné, Mandelbrojt ecc.:

Una applicazione è una terna (X, Y, F) di insiemi dove F è un sottoinsieme di $X \times Y$ soddisfacente le seguenti condizioni:

1. $\forall x \in X, \exists y \in Y : (x, y) \in F$
2. $[(x, y) \in F, (x, y') \in F] \Rightarrow y = y'$

L'obiettivo dei bourbakisti era quello di rifondare l'intero 'edificio matematico' basandosi sulle strutture e, sebbene non riuscirono completamente nel loro intento, con questa definizione di funzione contribuiscono a far sparire i termini di "tempo e azione", il concetto di legge di corrispondenza. Inoltre gli elementi degli insiemi non sono più necessariamente numeri ma oggetti di natura qualsiasi. A partire da questa definizione vengono introdotti nuovi

concetti e termini come il dominio di una funzione, l'iniettività, la suriettività, la composizione di funzioni e le condizioni di invertibilità...

Il passaggio successivo, avvenuto nel *XX* secolo, fu quello di ampliare il classico concetto di funzione per poter descrivere alcuni fenomeni di carattere prevalentemente fisico, come ad esempio i fenomeni impulsivi. Le esigenze "fisiche" più importanti erano in particolar modo due: quella di dover descrivere densità di cariche puntiformi non descrivibili da alcuna funzione ordinaria e quella di dover derivare funzioni discontinue non dotate di derivata in senso ordinario. Così, per ampliare il concetto di funzione, si passa dalla nozione classica alle distribuzioni o funzioni generalizzate, modificando il punto di vista locale delle funzioni e sostituendolo con uno globale.

1.2 La nascita della teoria delle distribuzioni

La "teoria delle distribuzioni" si viene a formare in Europa nel primo dopoguerra, periodo fruttuoso, nel quale la matematica cambiò radicalmente preannunciando una nuova epoca. Nel *XX* secolo gli sviluppi compiuti nella teoria degli insiemi, della misura, della probabilità, fecerò sì che la matematica potesse diffondersi in settori sempre più vasti. Bologna, nel 1928, riuscì a riunire la maggior parte dei matematici europei in un congresso internazionale, proponendosi, tra gli obiettivi, di fare un confronto sui vari temi e metodi emersi nel veloce sviluppo dell'analisi matematica. La teoria delle distribuzioni nasce dal contributo di queste numerose menti, tra le quali, P. Dirac, S. Sobolev, O. Heaviside e, in particolar modo, Laurent Schwartz (1915-2002), con la sua monografia "*Theorie des distributions*". In quest'opera, inizialmente, egli sottolinea come l'introduzione della funzione $\delta(x)$ da parte di Dirac fu uno dei motivi che resero estremamente necessaria la formulazione della teoria delle distribuzioni. Infatti, la delta veniva comunemente impiegata in fisica atomica e nelle altre scienze naturali, ma era considerata dai matematici una funzione "patologica". Nei casi più difficili, infatti, la differenziabilità risultava impossibile e questo costituiva un grande proble-

ma per la risoluzione delle equazioni differenziali che rappresentavano uno dei principali anelli di collegamento tra la matematica e la fisica. Schwartz dunque generalizza il concetto di differenziazione sfruttando il grande sviluppo dell'analisi funzionale e in particolare della nozione di spazio funzionale lineare¹. La delta di Dirac è un esempio di misura che non è una funzione. Se si continua a chiamarla funzione, afferma Schwartz, è solo perchè i fisici possano fare su di essa certe operazioni che sono definite sulle funzioni e non sulle misure, come ad esempio la derivazione. La delta di Dirac si allontana dunque dal concetto di funzione in senso classico e agisce come un operatore o un funzionale, associando ad ogni funzione continua ϕ un numero $\phi(0)$. Per questo, a causa della sua definizione matematicamente contraddittoria, nonostante il suo grande utilizzo da parte di fisici e ingegneri, rimane, nella prima metà del novecento, uno strumento di calcolo simbolico molto difficile da accettare e carente di quel rigore che caratterizza la matematica. Inoltre, quando D'Heaviside introdusse la sua "funzione gradino $Y(x)$ " con derivata la funzione di Dirac questo fu la goccia che fece traboccare il vaso:

"Ecrire que la fonction d'Heaviside $Y(x)$ égale à 0 pour $x < 0$ et à 1 pour $x \geq 0$ a pour dérivée la fonction de Dirac $\delta(x)$ dont la définition même est mathématiquement contradictoire, et parler des dérivées $\delta'(x), \delta''(x)$... de cette fonction dénuée d'existence réelle, c'est dépasser les limites qui nous sont permises.[1]"

Dunque:

"Quand una telle situation contradictoire se présente, il est bien rare qu'il n'en pas une théorie mathématique nouvelle qui justifie, sous une forme modifiée, le langage des physiciens; il y a même là une source importante de progrès des mathématiques et de la physique.[1]"

¹Lo **spazio funzionale lineare** è un tipo particolare di spazio vettoriale i cui elementi sono funzioni e vengono detti funzionali lineari.

Questa contraddizione fece capire che non era ancora stata formulata una teoria matematica che giustificasse il 'linguaggio' dei fisici, ma che essa poteva essere un importante punto di partenza per compiere progressi in ambito sia matematico che fisico. Nel *XX* secolo mancava una teoria che giustificasse l'utilizzo di funzioni come quella di Dirac e D'Heaviside, mancava una teoria che soddisfacesse da una parte il rigore matematico e dall'altro le necessità dei fisici nelle loro applicazioni. L. Schwartz fu il primo che "riuscì a costruire una teoria in cui non solo trovava rigorosa sistemazione la funzione di Dirac, ma era posta su nuove basi la teoria delle equazioni differenziali ordinarie e alle derivate parziali[13]". Schwartz con il termine distribuzione intende dunque un funzionale lineare e continuo sullo spazio di funzioni che sono differenziabili. La misura di Dirac, così facendo, è un tipo particolare di distribuzione e la funzione di D'Heaviside si dimostrerà essere la sua primitiva. Schwartz, infatti, non si limitò soltanto a dare una definizione di distribuzione, ma proseguì definendo la derivata di una distribuzione, che è essa stessa una distribuzione, e la primitiva, contribuendo in modo significativo ad una generalizzazione del calcolo, con numerose applicazioni: dall'equazione dell'onda di D'Alembert, alla teoria dei circuiti, delle onde elettromagnetiche fino alla moderna teoria degli impulsi.

La teoria delle distribuzioni:

"ha aperto una nuova area di ricerca matematica, creando le premesse per un impetuoso sviluppo in un gran numero di discipline matematiche, come la teoria delle equazioni differenziali, la teoria delle trasformate e l'analisi funzionale.[9]"

Capitolo 2

Le funzioni singolari

2.1 La delta di Dirac e le distribuzioni regolari

Definizione 1 (La delta di Dirac). La Delta di Dirac é una misura, lineare e continua, che opera sull'insieme delle funzioni a valori non nulli infinitamente derivabili, cioè sull'insieme $\mathcal{D} = \mathcal{C}_0^\infty$ delle funzioni infinitamente derivabili a supporto compatto (vedi figura 2.1).

È così definita:

$$\begin{aligned}\delta : \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^N) &\rightarrow \mathbb{R} \\ \delta(\varphi) &:= \langle \delta, \varphi \rangle = \varphi(0) \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}\end{aligned}$$

Per verificare la linearità è sufficiente provare che

$$\delta(a_1\varphi_1 + a_2\varphi_2) = a_1\delta(\varphi_1) + a_2\delta(\varphi_2)$$

che segue immediatamente dalle proprietà:

$$\langle \delta, \varphi_1 \rangle + \langle \delta, \varphi_2 \rangle = \langle \delta, \varphi_1 + \varphi_2 \rangle$$

per $\forall \varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{D}, \forall a_1, a_2 \in \mathbb{R}^N$.

Per la continuità prendiamo la successione seguente:

$$(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ in } \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^N) \text{ con } \text{supp } \varphi_n \subseteq K \subset \subset \mathbb{R}^N \forall n \in \mathbb{N} \text{ t.c. } \varphi_n \rightrightarrows \varphi$$

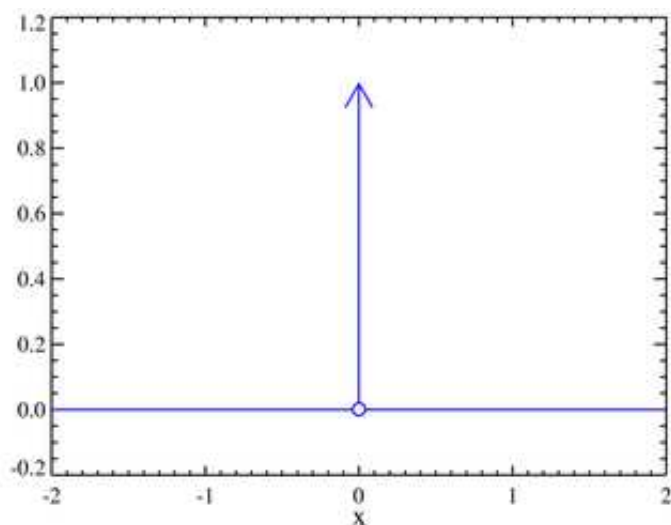


Figura 2.1: La delta di Dirac.

converge uniformemente.

Allora si ha che:

$$\varphi_n(0) = \langle \delta, \varphi_n \rangle \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \delta(\varphi) = \langle \delta, \varphi \rangle = \varphi(0)$$

e dunque:

$$\varphi_n(0) \xrightarrow{\text{conv. puntuale}} \varphi(0)$$

La delta di Dirac è dunque definita come un funzionale lineare e continuo sull'insieme delle funzioni test rispetto questo insieme di convergenza.

Definizione 2 (Distribuzioni regolari). Sia f una funzione $\in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^N)$ fissata, prendiamo il seguente funzionale:

$$T_f : \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^N) \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{con} \quad T_f(\varphi) = \int_{\mathbb{R}^N} f\varphi \, dx = \langle f, \varphi \rangle$$

Il funzionale T_f è lineare nella φ e continuo, cioè:

- (i) $T(\lambda_1\varphi_1 + \lambda_2\varphi_2) = \lambda_1T(\varphi_1) + \lambda_2T(\varphi_2) \quad \forall \varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ e $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$
- (ii) $\varphi_n \rightarrow \varphi \Rightarrow T_f(\varphi_n) \rightarrow T_f(\varphi)$

Dimostrazione.

(i) Segue dalla definizione e dalle proprietà dell'integrale.

$$\begin{aligned} T_f(\lambda_1\varphi_1 + \lambda_2\varphi_2) &= \int_{\mathbb{R}^N} f(\lambda_1\varphi_1 + \lambda_2\varphi_2)dx = \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} f\lambda_1\varphi_1dx + \int_{\mathbb{R}^N} f\lambda_2\varphi_2dx = \lambda_1T_f(\varphi_1) + \lambda_2T_f(\varphi_2) \end{aligned}$$

(ii) Segue dalla definizione di funzionale e dal fatto che le φ_n hanno supporto compatto.

$$T_f(\varphi_n) - T_f(\varphi) = \int_{\mathbb{R}^N} f(\varphi_n - \varphi) dx =$$

dato che le φ_n hanno supporto compatto

$$= \int_{\mathbb{R}^N=K} f(\varphi_n - \varphi) dx \leq \sup_K |\varphi_n - \varphi| \int_K |f| dx \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

□

Possiamo ora pensare di identificare T_f con f :

$$T_f = T_g \Rightarrow f = g \quad \text{q.d.}$$

questa affermazione è valida perchè

$$T_f = T_g \Leftrightarrow T_f(\varphi) = T_g(\varphi) \quad \forall \varphi \in \mathcal{C}_0^\infty$$

$$\Leftrightarrow \int_{\mathbb{R}^N} (f - g)\varphi dx = 0 \quad \forall \varphi \in \mathcal{C}_0^\infty$$

Prendiamo ora come mollificatore $\varphi_{\varepsilon,y}(x) = \frac{1}{\varepsilon^N} \varphi\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right)$ $\forall y$ fissato, questa è una funzione test, sostituendo nell'integrale precedente otteniamo:

$$\int_{\mathbb{R}^N} (f - g)\varphi_{\varepsilon,y}(x) dx = 0$$

$$(f - g)_\varepsilon(y) \equiv 0$$

dove la regolarizzata $(f-g)_\varepsilon \equiv 0 \Rightarrow f-g=0$ q.d.. Questi tipi di funzionali lineari e continui vengono chiamati *distribuzioni regolari*. Grazie a queste distribuzioni, note anche con il nome di funzioni generalizzate, si riescono a generalizzare i concetti di funzione e di distribuzione di probabilità estendendo il concetto di derivata a tutte le funzioni integrabili secondo Lebesgue.

Osservazione 1. La δ di Dirac non è una distribuzione regolare, infatti, non è una funzione, dunque $\nexists f \in L^1_{loc}$ t.c. $\delta = T_f$

Dimostrazione.

Supponiamo per assurdo che $\exists f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$ t.c. $\delta = T_f$.

Allora:

$$\langle \delta, \varphi \rangle = \langle T_f, \varphi \rangle \Leftrightarrow \varphi(0) = \int_{\mathbb{R}^N} f\varphi \, dx \quad \forall \varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^N)$$

Se una funzione così fatta esiste allora:

$$\int_{\mathbb{R}^N} f(x)\varphi(x) \, dx = \varphi(0) \quad \forall \varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^N)$$

Se prendo $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ t.c. $\varphi(0) = 0 \Rightarrow \int_{\mathbb{R}^N} f\varphi \, dx = 0$

In particolare:

$$\int_{\mathbb{R}^N \setminus \{0\}} f(x)\varphi(x) \, dx = 0 \quad \forall \varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^N \setminus \{0\})$$

$$\int_{\Omega} f\varphi \, dx = 0 \quad \forall \varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega) \Rightarrow f = 0 \quad \text{q.d.}$$

ne segue però che $f(x) = 0$ quasi dappertutto in \mathbb{R}^N . Quindi stiamo prendendo una funzione con supporto fuori dall'origine. Se $f = 0 \Rightarrow T_f \equiv 0$. Ma questo è impossibile, siamo arrivati all'assurdo poiché dovremmo avere:

$$0 = \langle T_f, \varphi \rangle = \langle \delta, \varphi \rangle = \varphi(0) = 1$$

per $\forall \varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ con $\varphi(0) = 1 \Rightarrow \delta$ non può essere una funzione. \square

2.2 La delta di Dirach come limite di distribuzioni regolari

Si può però pensare la delta di Dirach come una successione, o meglio come limite di una distribuzione regolare, nel modo seguente. Prendiamo

$$f(x) = \exp^{-\|x\|^2} \pi^{-n/2} = \frac{\exp^{-\|x\|^2}}{\pi^{n/2}}$$

una funzione di classe \mathcal{C}^∞ , sommabile in \mathbb{R}^N e con integrale che vale uno. Ora, applicando Fubini¹, possiamo riscrivere l'integrale come prodotto di N integrali di Gauss:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} \exp^{-\|x\|^2} dx &= \left(\int_{\mathbb{R}} \exp^{-x_1^2} dx_1 \right) \dots \left(\int_{\mathbb{R}} \exp^{-x_n^2} dx_n \right) = (\sqrt{\pi})^N \\ &\Rightarrow \int_{\mathbb{R}^N} f(x) dx = 1 \end{aligned}$$

Prendiamo una successione di funzioni con questo comportamento (vedi figura 2.2).

$\forall \varepsilon > 0$ poniamo :

$$f_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^N} f\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$$

dove

$$\int_{\mathbb{R}^N} f_\varepsilon dx = 1 \quad \forall \varepsilon > 0$$

Con funzione limite:

$$f_\varepsilon(x) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \begin{cases} +\infty & \text{se } x = 0 \\ 0 & \text{se } x \neq 0 \end{cases}$$

¹**Il teorema di Fubini** Siano A, B due spazi di misura, sia f una funzione misurabile allora:

$$\int_A \left(\int_B f(x, y) dy \right) dx = \int_B \left(\int_A f(x, y) dx \right) dy$$

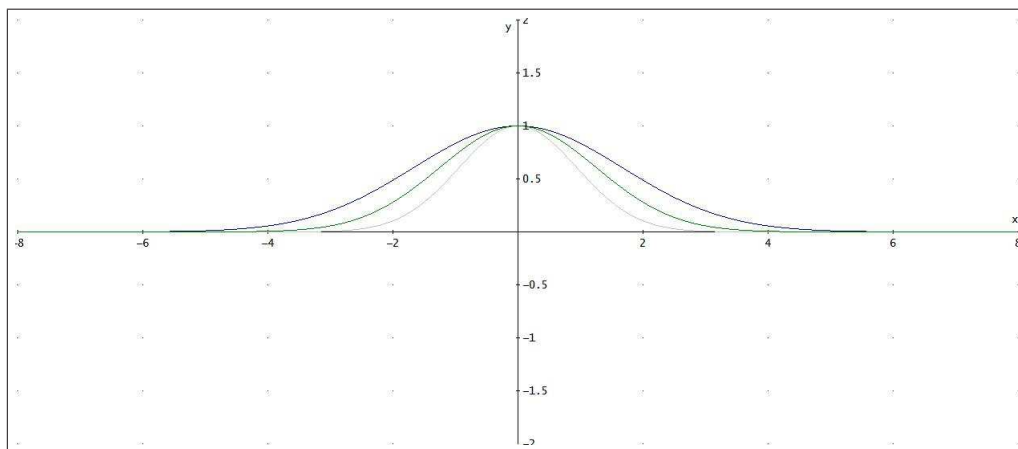


Figura 2.2: Successione di funzioni $f_\varepsilon(x)$.

Ora il limite per $\varepsilon \mapsto 0$ di $f_\varepsilon(x)$ vale zero per $x \neq 0$. Cioè:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} f_\varepsilon(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\exp\left(-\frac{\|x\|^2}{\varepsilon^2}\right)}{\pi^{N/2}} \frac{1}{\varepsilon^N} = 0$$

Infatti, il limite è del tipo:

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\exp^{-t}}{t^p}$$

E dunque operando la sostituzione $x = \frac{1}{t}$ e poi applicando p volte il teorema di De L'Hopitale si avrà:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\exp^{-x}}{\left(\frac{1}{x}\right)^p} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^p}{\exp^x} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{p!}{\exp^x} = 0$$

Allora per il funzionale relativo a $f_{\frac{1}{n}}$ varrà che:

$$T_{f_{\frac{1}{n}}} \rightarrow \delta \quad \Leftrightarrow \quad \langle T_{f_{\frac{1}{n}}}, \varphi \rangle \rightarrow \langle \delta, \varphi \rangle$$

Dimostrazione.

$$\langle T_{f_{\frac{1}{n}}}, \varphi \rangle - \langle \delta, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}^N} f_{\frac{1}{n}} \varphi \, dx - \varphi(0) =$$

dato che tutte le $f_{\frac{1}{n}}$ hanno integrale pari a uno

$$= \int_{\mathbb{R}^N} f_{\frac{1}{n}}(x)(\varphi(x) - \varphi(0)) \, dx =$$

che per $\eta > 0$ fissato

$$= \int_{|x| \leq \eta} f_{\frac{1}{n}}(x)(\varphi(x) - \varphi(0)) \, dx + \int_{|x| \geq \eta} f_{\frac{1}{n}}(x)(\varphi(x) - \varphi(0)) \, dx$$

Prendiamo il modulo della differenza:

$$\begin{aligned} & | \langle T_{f_{\frac{1}{n}}}, \varphi \rangle - \langle \delta, \varphi \rangle | \leq \\ & \leq \int_{\|x\| \leq \eta} f_{\frac{1}{n}}(x) |\varphi(x) - \varphi(0)| \, dx + \int_{\|x\| \geq \eta} f_{\frac{1}{n}}(x) |\varphi(x) - \varphi(0)| \, dx \end{aligned}$$

Cerchiamo ora di maggiorare questo integrale maggiorando singolarmente i due addendi:

$$(1.) \int_{\|x\| \leq \eta} f_{\frac{1}{n}}(x) |\varphi(x) - \varphi(0)| \, dx$$

$$(2.) \int_{\|x\| \geq \eta} f_{\frac{1}{n}}(x) |\varphi(x) - \varphi(0)| \, dx$$

Ora il primo si può subito maggiorare con l'estremo superiore per $|x| \leq \eta$ di $|\varphi(x) - \varphi(0)|$ perchè si può maggiorare con l'integrale su tutto \mathbb{R}^N che vale uno. Cioè:

$$\begin{aligned} (1.) \quad & \int_{\|x\| \leq \eta} f_{\frac{1}{n}}(x) |\varphi(x) - \varphi(0)| \, dx \leq \\ & \leq \sup_{|x| \leq \eta} |\varphi(x) - \varphi(0)| \int_{\mathbb{R}^N} f_{\frac{1}{n}}(x) \, dx = \sup_{|x| \leq \eta} |\varphi(x) - \varphi(0)| \end{aligned}$$

Il secondo, invece, si può maggiorare nel modo seguente:

$$(2.) \quad \int_{\|x\| \geq \eta} f_{\frac{1}{n}}(x) |\varphi(x) - \varphi(0)| \, dx \leq 2 \sup |\varphi| \int_{|x| \geq \eta} f_{\frac{1}{n}}(x) \, dx$$

e si dimostra che per $n \rightarrow \infty$ l'integrale tende a zero.

Dimostriamolo.

Prendiamo η fissato.

$$\int_{|x| \geq \eta} f_{\frac{1}{n}}(x) \, dx = \int_{|x| \geq \eta} n^N f(nx) \, dx$$

Facciamo un cambiamento di variabili, poniamo $nx = y \rightarrow x = \frac{1}{n}y$ e $dx = \mathcal{J}_{f_{\frac{1}{n}}} = \left(\frac{1}{n}\right)^N dy$, allora:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{|\frac{1}{n}(y)| \geq \eta} f(y) dy = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{|y| \geq n\eta} f(y) dy$$

Ora f è sommabile, è dunque l'integrale del complementare di una palla aperta $B(0, n\eta)$ di centro 0 e raggio $n\eta$. Quindi possiamo riscrivere l'integrale come:

$$\int_{\mathbb{R}^N} \chi_{(B(0, n\eta))^c}(y) f(y) dy$$

ma questa in valore assoluto è dominata da $|f|$, passando al limite sotto al segno di integrale² allora:

$$\int_{\mathbb{R}^N} \chi_{\mathbb{R}^N \setminus (B(0, n\eta))^c}(y) f(y) dy \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^N} 0 dx = 0,$$

Tornando alla disuguaglianza di partenza, questa ha certamente limite superiore, dunque:

$$0 \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} |T_{f_{\frac{1}{n}}}(\varphi) - \langle \delta, \varphi \rangle| \leq \sup_{|x| \leq \eta} |\varphi(x) - \varphi(0)| + 0$$

che sono rispettivamente le maggiorazioni dei due integrali, ma φ è continua di classe \mathcal{C}^∞ allora:

$$\lim_{\eta \rightarrow 0} \sup_{|x| \leq \eta} |\varphi(x) - \varphi(0)| + 0 = 0$$

Dunque il

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} |T_{f_{\frac{1}{n}}}(\varphi) - \langle \delta, \varphi \rangle| = 0$$

perchè la funzione è non negativa e diventa un'unica catena di uguaglianze. □

²**Teorema. Passaggio al limite sotto il segno di integrale.** Sia f una funzione sommabile su $A \subseteq \mathbb{R}^N$. Sia poi $(A_k)_{k \in \mathbb{N}}$ una successione monotona di sottoinsiemi misurabili di A . Allora:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{A_k} f d\mu = \int_{A_k} \lim_{k \rightarrow \infty} f d\mu$$

Abbiamo appena dimostrato come la delta di Dirac, sebbene non sia una funzione possa essere considerata come limite di una distribuzione regolare. Questo rappresenta, storicamente, un grande passo in avanti. Infatti, prima che venisse alla luce la teoria delle distribuzioni, si era già cercato di dare una giustificazione rigorosa dell'impiego della "funzione" di Dirac.

Definendo la "funzione" di Dirac come:

$$\delta(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t \neq 0 \\ \text{non definita} & \text{se } t = 0 \end{cases}$$

t.c

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) f(t - \epsilon) d\epsilon = f(t)$$

si era pensato di considerarla come limite di una successione di funzioni $s_n(t) = ns(nt)$ con $s(x)$ che soddisfa particolari condizioni.

Possibili scelte per $s(x)$ erano:

1. $s(x) = \frac{1}{\pi(x^2+1)}$
2. $s(x) = \pi^{-\frac{1}{2}} \exp^{-x^2}$
3. $s(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{se } -1 < x < 1 \\ 0 & \text{se } x \geq 1 \text{ e } x \leq -1 \end{cases}$

Dove si può notare che la seconda scelta è proprio quella da noi utilizzata. Infatti per $s(x)$ di questo tipo si otteneva che:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n(t) = 0 \quad \forall t \neq 0$$

e

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{+\infty} s_n(\epsilon) f(t - \epsilon) d\epsilon = f(t)$$

ma nonostante ciò non era corretto scrivere

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n(t) = \delta(t)$$

perchè il primo termine non ha limiti finiti per $t = 0$ e, di conseguenza non è lecito applicare, come invece abbiamo fatto in precedenza, il teorema di

passaggio al limite sotto al segno di integrale. Però, come abbiamo visto, si può dare senso al limite precedente se dal campo delle funzioni ci spostiamo a quello delle distribuzioni. Questo è stato possibile solo dopo che, all'incirca nel 1936, Sobolev introdusse il concetto di funzione generalizzata.

Infatti, per correttezza sarebbe meglio precisare che, sebbene sia Schwartz ad avere il merito di aver creato la teoria delle distribuzioni, fu Sobolev ad averle 'scoperte'. Sobolev spese la maggior parte della sua vita studiando le equazioni differenziali, in particolare le equazioni delle onde, con lo stesso obiettivo di Schwartz, cioè generalizzare, ampliare, il concetto di funzione in modo che certi problemi potessero essere risolti più facilmente. Il metodo di generalizzazione usato fu quello di spostarsi dal campo delle funzioni a quello dei funzionali lineari continui. Sobolev quindi ha il merito di aver utilizzato per primo il concetto di spazio funzionale per garantire l'esistenza di particolari soluzioni differenziali, di aver scoperto le distribuzioni.

Capitolo 3

L'equazione della corda vibrante e le distribuzioni

3.1 I primi studi sull'equazione della corda vibrante

Come già trattato storicamente nel primo capitolo, il *XVIII* secolo vide come dibattito più acceso quello relativo alla controversia sull'equazione della corda vibrante, con protagonisti principali Eulero e d'Alembert. Questa discussione è veramente importante perchè far luce sulle equazioni di questo fenomeno significava chiarire il concetto di funzione fino ad allora utilizzato. Il problema relativo alla corda vibrante era stato studiato esclusivamente come funzione del tempo e come funzione della distanza di un punto della corda da una delle sue estremità. Ora, invece, si cerca di studiare lo spostamento come funzione di entrambe le variabili, cosa che porta ad una equazione alle derivate parziali. A questo proposito M. Kline vuole sottolineare come:

”i matematici non cercarono di proposito la teoria delle equazioni alle derivate parziali. Essi continuarono a indagare gli stessi problemi fisici che li avevano condotti alle equazioni differenziali ordinarie e man mano che coglievano con maggiore sicurezza i prin-

cipi fisici che stanno alla base dei fenomeni, formularono enunciati matematici che fanno ora parte della teoria.[12]”

Per i matematici dell'ottocento, però, definire come abbiamo fatto nel secondo capitolo una funzione generalizzata non avrebbe avuto alcun senso senza prima una chiara visione e definizione di differenziabilità. C'è dunque tra le funzioni generalizzate (le distribuzioni) e il problema della corda vibrante alle equazioni alle derivate parziali una stretta connessione.

Per analizzare questo legame vediamo due strade diverse per arrivare all'equazione della corda vibrante. La prima utilizzando esclusivamente gli strumenti matematici, in particolare di d'Alembert e Eulero, a disposizione nel *XVIII* secolo, la seconda sfruttando in modo un po' anacronistico il concetto di funzione generalizzata.

3.2 La soluzione di d'Alembert

L'esempio più tipico dell'equazione della corda vibrante è quella della corda di violino, con la supposizione, al fine di rendere più semplici i calcoli, che le vibrazioni siano piccole. La corda veniva pensata come ad una specie di rosario, una sorta di filo elastico e flessibile piccolissimo con piccolissimi grani di peso uguale posti alla stessa distanza. Per garantire la continuità si supponeva che il numero dei pesi diventasse infinito mentre la loro massa diminuiva, in modo che la massa totale tendesse alla massa della corda continua. In questo passaggio però c'erano difficoltà per il passaggio al limite: difficoltà che a quel tempo venivano ignorate.

Il caso di un numero infinito di grani può essere studiato a partire da quello con un numero finito. Quest'ultimo era già stato trattato da Bernoulli nel 1727. Supponiamo che la corda abbia lunghezza l e che dunque un punto qualunque x sulla corda sia compreso nell'intervallo $0 \leq x \leq l$. Indichiamo con x_k l'ascissa della k -esima massa con $k = 1, \dots, n$, allora $x_k = k \frac{l}{n}$. Analizzando la forza che agisce sulla corda, Bernoulli aveva dimostrato che, se y_k

è lo spostamento della k -esima massa, allora:

$$\frac{d^2 y_k}{dt^2} = (na)^2 (y_{k+1} - 2y_k + y_{k-1}) \quad \text{per } k = 1, 2, \dots, n-1$$

dove a^2 dipende dalla tensione (supposta costante) T della corda e ha le dimensioni di una velocità.

Nel 1747 d'Alembert, partendo dal lavoro di Bernoulli, sostituì y_k con $y(t, x)$ e $\frac{l}{n}$ con Δx trovando la seguente equazione:

$$\frac{\partial^2 y(t, x)}{\partial t^2} = a^2 \left[\frac{y(t, x + \Delta x) - 2y(t, x) + y(t, x - \Delta x)}{(\Delta x)^2} \right]$$

e osservò che per $n \mapsto \infty$, $\Delta x \mapsto 0$ e dunque:

$$\frac{\partial^2 y(t, x)}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 y(t, x)}{\partial x^2}$$

Inoltre dato che la corda è fissata alle estremità $x = 0$ e $x = l$ vanno considerate anche due equazioni al contorno:

$$y(t, 0) = 0 \quad y(t, l) = 0$$

che dovranno essere soddisfatte dalla soluzione. Inoltre per $t = 0$ la corda viene spostata assumendo la forma di una qualche curva di equazione $y = f(x)$ e poi lasciata andare, il che significa che ogni particella ha velocità iniziale nulla. Cioè:

$$y(t, 0) = f(x) \quad \left. \frac{\partial y(t, x)}{\partial t} \right|_{t=0} = 0$$

D'Alembert dimostrò che lo spostamento dei punti su una corda vibrante fissata alle estremità poteva essere descritto mediante l'equazione seguente:

$$y(x, t) = \frac{1}{2} \psi(at + x) + \frac{1}{2} \phi(at - x)$$

dove ϕ e ψ erano determinate proprio dalle condizioni iniziali della corda. Qui sta il cuore del dibattito tra d'Alembert e Eulero. Infatti, mentre d'Alembert considera ϕ e ψ come due funzione analitiche, Eulero è convinto che qualunque curva, perfino una liberamente disegnata a mano, possa rappresentare uno stato iniziale per la corda.

Verifichiamo se le condizioni iniziali, seguendo il ragionamento di d'Alembert, sono rispettate o meno dalla soluzione trovata.

La condizione al contorno $y(t, 0)$ se sostituita nell'equazione precedente da per l'ascissa $x = 0$:

$$y(t, 0) = \frac{1}{2}\psi(at) + \frac{1}{2}\phi(at) = 0$$

Ora dato che per ogni x si ha che $at + x = at'$, per ogni x, t varrà che $\phi(x + at) = -\psi(x + at)$.

Analogamente con l'altra condizione al contorno si ottiene:

$$y(t, l) = \frac{1}{2}\psi(at + l) + \frac{1}{2}\phi(at - l) = 0$$

applicando l'uguaglianza trovata

$$y(t, l) = \frac{1}{2}\psi(at + l) - \frac{1}{2}\psi(at - l) = 0$$

dalla quale segue l'identità $\frac{1}{2}\psi(at + l) = \frac{1}{2}\psi(at - l)$, che garantisce che ψ deve essere periodica di periodo $2l$. Ricordando ora la condizione iniziale e le equazioni al contorno, in particolare che $\phi = -\psi$, si ha che $\psi'(x) = \psi'(-x)$ che una volta integrata assicura che la funzione ϕ è una funzione dispari: $\phi(x) = -\phi(-x)$.

Sostituendo questa relazione nell'equazione dell'onda di d'Alembert e tenendo conto delle relazioni trovate, per $t = 0$, otteniamo:

$$y(0, x) = \psi(x)$$

ma per le condizioni iniziali $y(0, x) = f(x)$ allora:

$$\psi(x) = f(x) \quad 0 \leq x \leq l$$

Il risultato così ottenuto è molto importante perchè dato che $\psi(x)$ deve essere una funzione dispari e periodica, anche $f(x)$ deve soddisfare le stesse condizioni. Inoltre $y(t, x)$ deve soddisfare l'equazione differenziale, deve dunque essere derivabile due volte e così a seguito dell'uguaglianza $y(0, x) = f(x)$ anche $f(x)$ deve essere di classe C^2 .

3.3 La risposta di Eulero

Eulero, poco tempo dopo le pubblicazioni di d'Alembert, rispose con il saggio "*De vibratione chordorum exercitatio*". In questo lavoro egli riconosce come valido il metodo impiegato da d'Alembert, però sottolinea che anche le curve da lui dette 'discontinue', (oggi chiamate funzioni continue a derivata discontinua) potevano essere considerate come un'unica curva e un'unica funzione e dunque rappresentare curve iniziali.

Eulero articolò la sua risposta in tre punti fondamentali:

1. mostrò che anche per le funzioni 'discontinue' vale la costruzione geometrica del movimento della corda a partire dalla posizione iniziale e dalla velocità;
2. che la soluzione generale individuata da d'Alembert era valida anche per il caso di funzioni discontinue;
3. che l'errore che Eulero così facendo poteva compiere poteva essere considerato trascurabile.

Il terzo punto è il più importante dal punto di vista della teoria delle distribuzioni, infatti se pensiamo invece che ad una piccolissima alterazione della soluzione ad una successione di funzioni f_n che tendono a f in qualche topologia, allora ciò che sostiene Eulero può essere riformulato nel modo seguente:

"Se una sequenza di soluzioni $f_n(x \pm t)$ tende a f allora f è essa stessa una soluzione."

Da qui ora il passaggio è breve, infatti se sostituiamo alla parola 'soluzione' quella di 'soluzione generalizzata' otteniamo la definizione di soluzione generalizzata per una equazione alle derivate parziali:

"Se una sequenza di soluzioni $f_n(x \pm t)$ tende a f allora f è una soluzione generalizzata."

La problematica della corda vibrante è stata dunque importantissima per la teoria delle distribuzioni perchè portò all'attenzione dei matematici del tempo che la soluzione ottenuta da d'Alembert aveva una caratteristica insolita: richiedeva meno regolarità della funzione, f doveva essere almeno di classe C^2 , mentre $y(x, t)$ era sufficiente fosse di classe C^1 .

Lagrange per primo si accorse di questo problema e cercò di risolverlo sostituendo

$$\frac{d^2y(x)}{dx^2} = \frac{y(x - \epsilon) + y(x + \epsilon) - 2y(x)}{\epsilon^2}$$

per ϵ infinitamente piccolo. Ora, quest'ultima equazione, può effettivamente essere vista come una generalizzazione dell'equazione di d'Alembert per le derivate di secondo ordine, ma Lagrange la pensò sempre come una correzione e non come una generalizzazione, come invece fecero i matematici degli anni successivi.

3.4 L'equazione della corda vibrante oggi

L'equazione della corda vibrante è una equazione d'onda differenziale alle derivate parziali uni-dimensionale. La ricerca dell'equazione del suo moto in funzione del tempo e dello spazio viene compiuta attualmente sfruttando tutti i mezzi matematici sviluppatasi dopo d'Alembert, Eulero, Bernoulli e Lagrange. Partiamo dall'equazione unidimensionale delle onde, anche detta equazione alle derivate parziali iperbolica e cerchiamo di arrivare a una soluzione generale dell'equazione della corda vibrante. Per semplicità ci limitiamo a studiare il caso con $f = 0$, cioè supponiamo uno spostamento iniziale della corda nullo.

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

portando tutto a sinistra dell'uguale otteniamo

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0$$

cioè

$$y_{tt} - a^2 y_{xx} = 0$$

dove la variabile t indica il tempo, x la coordinata spaziale e a la velocità. Una soluzione di questa equazione in un dominio convesso Ω di \mathbb{R}^2 è data da

$$y(x, t) = F(x - at) + G(x + at)$$

dove $s \mapsto F(s), G(s)$ sono funzioni di classe C^2 nel loro dominio di definizione. Infatti possiamo eseguire il seguente cambiamento di variabili

$$x + at = \xi \quad x - at = \mu$$

ottenendo $y(x, t) = y[\xi(x, t), \mu(x, t)]$ e

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial y}{\partial \xi} + \frac{\partial y}{\partial \mu}, \quad a^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = a^2 \frac{\partial^2 y}{\partial \xi^2} + 2a^2 \frac{\partial^2 y}{\partial \xi \partial \mu} + a^2 \frac{\partial^2 y}{\partial \mu^2}$$

$$\frac{\partial y}{\partial t} = \frac{\partial y}{\partial \xi} a + \frac{\partial y}{\partial \mu} (-a), \quad \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 y}{\partial \xi^2} - 2a^2 \frac{\partial^2 y}{\partial \xi \partial \mu} + a^2 \frac{\partial^2 y}{\partial \mu^2}$$

ora uguagliando i secondi membri delle ultime due equazioni si ricava

$$4a^2 \frac{\partial^2 y}{\partial \xi \partial \mu} = 0$$

che significa che $\frac{\partial y}{\partial \mu}$ è indipendente da ξ , cioè $\frac{\partial y}{\partial \mu} = f(\mu)$ con f funzione arbitraria. Indicando ora con $F(\mu)$ una primitiva di f abbiamo proprio la soluzione cercata perchè

$$y(\xi, \mu) = F(\mu) + G(\xi)$$

con G funzione arbitraria della ξ . E dunque tornando alle variabili di partenza:

$$y(x, t) = F(x - at) + G(x + at)$$

che viene chiamata equazione integrale di d'Alembert, descrive le piccole vibrazioni trasversali di un generico filo e fa corrispondere a $F(x - at)$ un'onda progressiva, cioè nel verso positivo dell'asse x e a $G(x + at)$ un'onda regressiva, cioè nel verso negativo dell'asse. Per determinare le funzioni F e G , ora basta ricorrere alle condizioni iniziali che consistono, fisicamente, nell'assegnare posizione e velocità iniziali. Per arrivare all'equazione della corda vibrante

dobbiamo quindi risolvere il seguente problema di Cauchy, supponendo di avere una velocità iniziale non nulla:

$$\begin{cases} y_{tt} - a^2 y_{xx} = 0 \\ y(x, 0) = \psi(x) \in C^\infty(\mathbb{R}) \\ y_t(x, 0) = \phi(x) \in C^\infty(\mathbb{R}) \end{cases}$$

Determiniamo ora F e G dalle condizioni iniziali, da $y(x, t) = F(x - at) + G(x + at)$ segue che:

$$\begin{aligned} y(x, 0) &= F(x) + G(x) = \psi(x) \\ F'(x) + G'(x) &= \psi'(x) \\ -F'(x) + G'(x) &= \frac{1}{a}\phi(x) \end{aligned}$$

e da questo ricavando $F'(x)$ e $G'(x)$ dalle equazioni precedenti e sostituendo nella terza si ottiene:

$$\begin{aligned} G'(x) &= \frac{1}{2a}\psi(x) + \frac{1}{2}\phi'(x) \\ F'(x) &= -\frac{1}{2a}\psi(x) + \frac{1}{2}\phi'(x) \end{aligned}$$

che integrando ci dà le equazioni cercate:

$$\begin{aligned} F(\xi) &= \frac{1}{2}\phi(\xi) - \frac{1}{2a} \int_0^\xi \psi(s) ds + c_1 \\ G(\mu) &= \frac{1}{2}\phi(\mu) - \frac{1}{2a} \int_0^\mu \psi(s) ds + c_2 \end{aligned}$$

Quindi:

$$y(x, t) = \frac{1}{2}[\phi(x - at) + \phi(x + at)] + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(s) ds \quad (3.1)$$

dato che per la condizione iniziale $y(x, 0) = \phi(x)$, $c_1 + c_2 = 0$.

Vediamo ora se è ben definita. La soluzione del problema di Cauchy è ben definita se

$$\begin{cases} x \mapsto \phi(x) \in C_{loc}(\mathbb{R}) \\ x \mapsto \psi(x) \in L^1_{loc}(\mathbb{R}) \end{cases}$$

ma in questo caso le funzioni corrispondenti non devono soddisfare le equazioni differenziali nel senso classico. Per questo motivo possiamo considerare 3.1 come *soluzione debole* del problema di Cauchy ogni volta che i dati soddisfanno le condizioni precedenti.

Osservazione 2. Il problema di Cauchy è ben posto nel senso di Hadamard. Cioè:

- esiste la soluzione ed è unica;
- dipende con continuità dai dati iniziali, cioè una piccola perturbazione dei dati $x \mapsto \psi(x), \phi(x)$ comporta piccoli cambiamenti nella soluzione.

Dimostrazione.

Dimostriamo l'ultima affermazione. Il problema è un problema lineare, dunque è sufficiente mostrare la seguente implicazione: piccole variazioni nei dati \Rightarrow piccole variazioni della soluzione $y(x, t)$. Supponiamo che per un ϵ piccolo compreso tra $(0, 1)$ la norma delle funzioni ψ e ϕ nella topologia $L^\infty(\mathbb{R})$ sia:

$$\|\psi\|_{\infty, \mathbb{R}}, \|\phi\|_{\infty, \mathbb{R}} \leq \epsilon$$

Allora per l'equazione di d'Alembert la soluzione $y(x, t)$ corrispondente a questi dati iniziali verificherà la condizione seguente:

$$\|y(x, t)\|_{\infty, \mathbb{R}} \leq (1 + t)\epsilon$$

che prova la dipendenza con continuità dai dati iniziali. \square

3.5 La soluzione di d'Alembert è una soluzione debole

Dimostriamo che la soluzione dell'equazione della corda vibrante

$$y(x, t) = \frac{1}{2}[\phi(x - at) + \phi(x + at)] + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(s) ds$$

è una soluzione debole nel senso delle distribuzioni.

Ci poniamo nel caso $f = 0$.

Cioè dimostriamo:

1. $y(x, t) \in \mathcal{L}'_{loc}$, cioè $y(x, t)$ è anch'essa una distribuzione regolare;
2. $\int_{\mathbb{R}^2} y \square(\varphi) = \int_{\mathbb{R}^2} f \varphi \quad \forall \varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^2)$

Dimostrazione.

Ricordiamo, come prima cosa che $\square(y) = f \in \mathcal{L}'_{loc}$, dove \square è l'operatore d'Alembertiano:

$$\square y = \left(\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - \Delta y \right)$$

e che nel caso particolare da noi trattato $\square(y) = 0 \in \mathcal{L}'_{loc}$.

Dimostriamo 1.

Vogliamo provare che la soluzione di d'Alembert $y(x, t) \in \mathcal{L}^1_{loc}$. Supponiamo $y(x, t) \in \mathcal{C}^\infty$. Ora

$$y(x, t) = \frac{1}{2} [\phi(x - at) + \phi(x + at)] + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(s) ds$$

dove $\phi \in \mathcal{L}^1_{loc}$. Allora $\frac{1}{2} [\phi(x - at) + \phi(x + at)] \in \mathcal{L}^1_{loc}$ perchè somma di funzioni localmente sommabili su un compatto.

Analizziamo ora l'ultimo addendo:

$$\frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(s) ds$$

questo integrale è ancora una funzione $\in \mathcal{L}^1_{loc}$ perchè limitata. Si può infatti maggiorare l'integrale con l'integrale della funzione ϕ che è addirittura $\in \mathcal{L}^\infty_{loc}$.

Dimostriamo 2.

Suddividiamo questa parte della dimostrazione in due passaggi.

Nel primo dimostriamo chiaramente che la soluzione classica è anche soluzione debole, nel secondo che in particolare la soluzione di d'Alembert è soluzione debole nel senso delle distribuzioni.

Supponiamo che y sia una distribuzione regolare, cioè che $y \in \mathcal{L}'_{loc}$. Sostituiamo all'operatore d'Alembertiano la sua formulazione estesa, consideriamo il primo membro dell'equazione integrale:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^2} y \square(\phi) \, ds &= \int_{\mathbb{R}^2} y \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - \Delta \phi \right) \, ds = \int_{\mathbb{R}^2} y \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \, ds - \int_{\mathbb{R}^2} \Delta \phi \, ds = \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} y \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \, ds - \int_{\mathbb{R}^2} y \operatorname{div}(\nabla \phi) \, ds = \end{aligned}$$

ora grazie alla catena di uguaglianze seguente:

$$y \Delta \phi = \operatorname{div}(y \nabla \phi) - \langle \nabla \phi, \nabla y \rangle$$

possiamo sostituire nel secondo integrale:

$$= \int_{\mathbb{R}^2} y \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \, ds - \int_{\mathbb{R}^2} \operatorname{div}(y \nabla \phi) \, ds + \int_{\mathbb{R}^2} \langle \nabla \phi, \nabla y \rangle \, ds$$

ora

$$\int_{\mathbb{R}^2} \operatorname{div}(y \nabla \phi) \, ds = 0$$

perchè siamo su un compatto e la funzione è supportata al suo interno.

Allora rimane:

$$\int_{\mathbb{R}^2} y \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \, ds + \int_{\mathbb{R}^2} \langle \nabla \phi, \nabla y \rangle \, ds$$

Analizziamo ora il secondo membro dell'equazione integrale iniziale.

Sappiamo che $\square y = f$, allora:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^2} f \phi \, ds &= \int_{\mathbb{R}^2} \square y \phi \, ds = \int_{\mathbb{R}^2} \phi \left(\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - \Delta y \right) \, ds = \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} \phi \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \, ds + \int_{\mathbb{R}^2} \phi \Delta y \, ds = \end{aligned}$$

ora per lo stesso ragionamento utilizzato in precedenza:

$$\begin{aligned} &= \int_{\mathbb{R}^2} \phi \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \, ds - \int_{\mathbb{R}^2} \operatorname{div}(\phi \nabla y) \, ds + \int_{\mathbb{R}^2} \langle \nabla \phi, \nabla y \rangle \, ds = \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} \phi \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \, ds + \int_{\mathbb{R}^2} \langle \nabla \phi, \nabla y \rangle \, ds \end{aligned}$$

Allora l'equazione integrale vale se e solo se vale la seguente equazione:

$$\int_{\mathbb{R}^2} y \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} ds + \int_{\mathbb{R}^2} \langle \nabla \phi, \nabla y \rangle ds = \int_{\mathbb{R}^2} \phi \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} ds + \int_{\mathbb{R}^2} \langle \nabla \phi, \nabla y \rangle ds$$

che si riduce a:

$$\int_{\mathbb{R}^2} y \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} ds = \int_{\mathbb{R}^2} \phi \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} ds$$

Infine, dato che y è una distribuzione regolare, segue la tesi dalla definizione di derivata di una distribuzione. Infatti:

$$D^p T(\phi) = (-1)^{|p|} T(D^p \phi)$$

per $p = 2$ verifica l'uguaglianza.

Svolgiamo ora il secondo passaggio.

Data la soluzione di d'Alembert

$$y(x, t) = \frac{1}{2} [\phi(x - at) + \phi(x + at)] + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(s) ds$$

possiamo vederla come:

$$y(x, t) = T(\phi) + R(\psi)$$

con T, R operatori funzionali.

Consideriamo ora due successioni:

$$\phi_n, \psi_n \in \mathcal{C}^\infty \quad \text{tali che} \quad \phi_n \mapsto \phi, \quad \psi_n \mapsto \psi \in \mathcal{L}_{loc}^1$$

e poniamo per definizione $y_n := T(\phi_n) + R(\psi_n)$

Segue che:

a) $y_n \in \mathcal{C}^\infty$

b) $\square y_n = 0$

c) $y_n \mapsto y \in \mathcal{L}_{loc}^1$

Infatti:

a) y_n è per definizione somma di $T(\phi_n)$ e $R(\psi_n)$, dove le successioni ϕ_n e ψ_n sono, per ipotesi, di classe \mathcal{C}^∞ e T, R sono funzionali. Dunque se le successioni sono di classe \mathcal{C}^∞ e R, T sono funzionali, segue dalla definizione di distribuzione e di funzionale che sono anche lineari e continui e che anche $T(\phi_n)$ e $R(\psi_n)$ sono di classe \mathcal{C}^∞ e così di conseguenza $y_n \in \mathcal{C}^\infty$.

b) dobbiamo verificare che $\square y_n = 0$, cioè che:

$$\left(\frac{\partial^2 y_n}{\partial t^2} - \Delta y_n\right) = 0$$

$$\frac{\partial^2 y_n}{\partial t^2} = \Delta y_n$$

ma, dato che per definizione $\Delta y_n = \operatorname{div}(\nabla y_n)$, che

$$\frac{\partial^2 y_n}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 y_n}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 y_n}{\partial x^2}$$

cioè

$$\frac{\partial^2 y_n}{\partial x^2} = 0$$

Ma ora

$$y(x, t) = \frac{1}{2}[\phi(x - at) + \phi(x + at)] + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(s) ds$$

dal quale segue la tesi.

c) Sappiamo per ipotesi che ϕ_n e ψ_n convergono rispettivamente a ϕ e a ψ . Vogliamo dimostrare che $y_n = T(\phi_n) + R(\psi_n)$ tende a $y = T(\phi) + R(\psi)$. Sia K un compatto, dunque passando alla norma¹ in L^1 :

$$\|y_n - y\|_{\mathcal{L}^1(K)} = \|T(\phi_n - \phi) + R(\psi_n - \psi)\|_{\mathcal{L}^1(K)} \leq$$

$$\leq \|T(\phi_n - \phi)\|_{\mathcal{L}^1(K)} + \|R(\psi_n - \psi)\|_{\mathcal{L}^1(K)}$$

segue che per $n \mapsto \infty$, $\phi_n \rightarrow \phi$ e $\psi_n \rightarrow \psi$, dunque $T(\phi_n - \phi) \rightarrow 0$ e $R(\psi_n - \psi) \rightarrow 0$. Per linearità del funzionale $T(\phi_n) - T(\phi) \rightarrow 0$ e

¹**Norma L^p .** La norma L^p è così definita: $\phi \mapsto \|\phi\|_{\mathcal{L}^p} := \left(\int_{\mathbb{R}} |\phi(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}$ per $p \geq 1$.

$$R(\psi_n) - R(\psi) \rightarrow 0.$$

Quindi

$$\|T(\phi_n - \phi) + R(\psi_n - \psi)\|_{\mathcal{L}^1(K)} \rightarrow 0$$

dall'uguaglianza infine segue:

$$\|y_n - y\|_{\mathcal{L}^1(K)} \rightarrow 0 \Rightarrow y_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} y$$

È ora lecito scrivere che:

$$\int y_n \square \phi \, dx dt = 0 \quad \forall \phi \in \mathcal{C}_0^\infty$$

e che per $n \mapsto \infty$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int y_n \square \phi \, dx dt = \int y \square \phi \, dx dt = 0$$

Dunque è provata la tesi, $\square y = 0$ in senso debole. La soluzione di d'Alembert è soluzione debole nel senso delle distribuzioni. \square

Il problema della corda vibrante è dunque importante quanto lo studio della funzione delta da parte di Dirac. Entrambi, anche se in modi essenzialmente molto diversi, ci portano al cuore del problema contribuendo ad una generalizzazione della matematica e testimoniando come spesso i grandi progressi di questo ambito non sono esclusivamente il frutto di ricerche astratte e puramente teoriche, ma studio di fenomeni fisici tratti da esperienze di vita quotidiana, come la vibrazione di una corda su uno strumento ad arco. L'osservazione della realtà è stata la strada che ha messo in evidenza questa questione irrisolta. Il binomio osservazione-teoria ha permesso, partendo da casi particolari, la costruzione di una teoria matematica oggi universalmente accettata e sfruttata nelle applicazioni matematiche: *"La teoria delle distribuzioni"*.

Capitolo 4

La teoria delle distribuzioni di Schwartz

Vediamo ora nello specifico la teoria così come fu proposta da Schwartz nell'opera "*Théorie des distributions*", introducendo prima concetti fondamentali e necessari per la sua formulazione.

4.1 Proprietà e nozioni elementari delle distribuzioni

Definizione 3 (La nozione di misura). Una misura μ definita in \mathbb{R}^N è una funzione completamente additiva di insiemi così definita:

sia S una σ -algebra t.c.

(i) $\emptyset, X \in S$

(ii) se $A \in S \Rightarrow A^C \in S$

(iii) se $A_k \in S$ per $\forall k \in \mathbb{N} \Rightarrow \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \in S$

allora $\mu : S \rightarrow [0, \infty]$ è una misura se presi due insiemi $A, B \in S$ si ha che:

(i) se $A \subseteq B \Rightarrow \mu(A) \leq \mu(B)$

(ii) se $A_k \in \mathcal{S}$ per $\forall k \in \mathbb{N}$ e $A_k \cap A_h = \emptyset$ per $k \neq h \Rightarrow$

$$\mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k)$$

Sia φ una funzione continua a valori complessi su \mathbb{R}^N e nulla eccetto che su di un insieme compatto. La misura μ associa a φ un numero complesso che è l'integrale $\mu(\varphi) = \iint \dots \int_{\mathbb{R}^N} \varphi \, d\mu$. Quelle funzioni φ per le quali si può definire $\mu(\varphi)$ attraverso il metodo del prolungamento analitico vengono chiamate funzioni sommabili per la misura μ . La famiglia delle funzioni sommabili dipende ovviamente da μ ma è anche vero che se φ è continua e nulla eccetto che su di un insieme compatto allora è sommabile per tutta la misura μ . Indichiamo con (\mathcal{C}) l'insieme di tutte le funzioni φ .

Una misura viene definita reale se $\mu(\varphi)$ è reale per φ reale. Si parla di σ -algebra di Borel o di tribù dei borelliani quando si considera il più piccolo insieme di funzioni che da un lato contiene tutte le funzioni continue, dall'altro non può contenere una successione convergente di funzioni senza contenere il loro limite. In altre parole è la più piccola σ -algebra su di un insieme dotato di struttura topologica che contiene tutti gli aperti della topologia stessa.

Definizione 4 (Supporto di una funzione e di una misura). Si chiama supporto della funzione f l'insieme chiuso seguente:

$$\text{supp} f = \overline{\{x \in X : f(x) \neq 0\}}$$

Un punto di questo insieme è un punto di \mathbb{R}^N tale che in un intorno di quel punto la funzione non si annulla mai. Se X è uno spazio metrico localmente compatto allora si indica con \mathcal{C}_0 l'insieme delle funzioni continue a supporto compatto e con \mathcal{C}_0^∞ l'insieme delle funzioni continue a supporto compatto infinitamente derivabili.

Sia μ una misura su \mathbb{R}^N , si definisce supporto di una misura un insieme chiuso di \mathbb{R}^N così definito:

$$\text{supp}(\mu) = \overline{\{\varphi \in \mathcal{C} : \mu(\varphi) \neq 0\}}$$

Segue di conseguenza che il complementare di $\text{supp}(\mu)$ è il più grande degli aperti che annulla la misura.

Definizione 5 (Lo spazio \mathcal{D} , funzioni test e funzionali). Chiamiamo \mathcal{D} lo spazio vettoriale delle funzioni complesse $\varphi(x)$ della variabile reale $x = (x_1, \dots, x_n)$, infinitamente derivabili su tutto \mathbb{R}^N , a supporto compatto. Le funzioni $\varphi(x) \in \mathcal{D}$ vengono chiamate 'funzioni test'. Si definisce, invece, funzionale, una corrispondenza che associa ad ogni elemento appartenente ad uno spazio di funzioni un elemento di un insieme di numeri reali o complessi. In particolare si dirà funzionale reale o complesso sullo spazio \mathcal{D} una corrispondenza assegnata tra ogni funzione $\varphi(x)$ e un numero reale o complesso. Un funzionale definito in uno spazio vettoriale di funzioni φ viene indicato con $T(\varphi)$. Un funzionale si dice lineare se gode delle seguenti due proprietà:

- (i) $T(\varphi_1) + T(\varphi_2) = T(\varphi_1 + \varphi_2) \quad \forall \varphi_1, \varphi_2 \in \psi$
- (ii) $T(\lambda\varphi) = \lambda T(\varphi) \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}, \forall \varphi \in \psi$

Si dice, invece, continuo se, per qualunque successione (φ_i) convergente a φ , la successione $T(\varphi_i)$ converge a $T(\varphi)$, cioè se:

$$(\varphi_i) \xrightarrow{i \rightarrow \infty} \varphi \Leftrightarrow T(\varphi_i) \rightarrow T(\varphi).$$

Cerchiamo ora di ricollegarci alla definizione data di distribuzione. Possiamo, seguendo l'esempio di Schwartz, generalizzare la nozione di funzione attraverso il concetto di misura e poi generalizzando il concetto di misura arrivare a quello di distribuzione.

Generalizzazione del concetto di funzione: la misura.

Supponiamo di voler generalizzare la nozione di funzione complessa $f(x_1, \dots, x_n)$ di n variabili reali x_1, \dots, x_n . Sia \mathbb{R}^N lo spazio vettoriale di dimensione N nel quale ogni punto x è definito per le n coordinate x_1, \dots, x_n . Assumiamo che valgano le notazioni seguenti:

1. $x + y$ è il punto di coordinate $x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n$
2. $x \geq 0$ indica $x_1 \geq 0, \dots, x_n \geq 0$ $x \geq y$ indica $x - y \geq 0$

3. $|x|$ indica la norma euclidea $\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}$

4. dx indica $dx_1 dx_2 \dots dx_n$

Consideriamo una misura in particolare: la misura di Lebesgue². Sia μ una misura assolutamente continua con densità $f(x) = f(x_1, \dots, x_n)$, funzione sommabile per la misura di Lebesgue su tutto un insieme compatto. Si ha, allora, per l'insieme dei borelliani A che:

$$\mu(A) = \iint \dots \int_A f(x) dx$$

e che presa $\varphi \in (\mathcal{C})$

$$\mu(\varphi) = \iint \dots \int_{\mathbb{R}^N} f(x) \varphi(x) dx.$$

La funzione f non è definita dappertutto ma quasi dappertutto. Così facendo allora abbiamo stabilito una corrispondenza biunivoca tra il sottospazio vettoriale formato da misure assolutamente continue e lo spazio vettoriale delle classi della funzioni sommabili su un compatto. Sfruttando questa corrispondenza si potrà identificare in una successione la misura μ assolutamente continua alla sua densità f , così da poter scrivere, in questo caso particolare di misura, $\mu(\varphi) = \int f(\varphi)$. Non bisogna però confondersi. La funzione f può da una parte essere studiata come funzione nel senso usuale del termine, dall'altro va considerata come la densità di una misura assolutamente continua μ : come un funzionale.

²Un insieme è **misurabile secondo Lebesgue** se:

$$\mu^*(E) = \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^C)$$

dove E, A sono insiemi di \mathbb{R}^N e

$$\mu^*(A) = \inf \left\{ \sum_{k \in \mathcal{A}} \text{mis} \mathcal{I}_k \text{ t.c. } (\mathcal{I}_k) \text{ è un ricoprimento di } A \subseteq \mathbb{R}^N \right\}$$

Generalizzazione del concetto di misura: le distribuzioni.

Teorema 4.1.1. *Affinchè una distribuzione T possa essere definita attraverso una misura μ , è necessario e sufficiente che sia continua su ogni \mathcal{D}^K con la topologia indotta da \mathcal{C}^K . In questo caso, μ è ben definito e unico.*

Dimostrazione. Sia H un compatto di \mathbb{R}^N . Se T è continua su \mathcal{D}_H con la topologia indotta da \mathcal{C}_H , allora T si può prolungare in modo unico in una forma lineare T_H su $\overline{D_H}$ in \mathcal{C}_H continua per la topologia indotta da \mathcal{C}_H . Se $H_1 \supset H_2$, $\overline{D_{H_1}} \supset \overline{D_{H_2}}$, e $\overline{T_{H_1}}$ estende $\overline{T_{H_2}}$. Allora i diversi prolungamenti $\overline{T_H}$ definiscono un prolungamento \overline{T} di T nell'unione dei $\overline{D_H}$. Unione che non è altro che l'insieme \mathcal{C} delle funzioni continue a supporto compatto e \overline{T} è una forma lineare su \mathcal{C} la cui restrizione ad ogni \mathcal{C}_K è continua. Il che equivale a dire che è una misura μ e che T è una distribuzione definita a partire da questa misura. \square

Dunque una distribuzione T è una forma lineare su \mathcal{D} la cui restrizione a ogni \mathcal{D}_K , con K compatto contenuto in \mathbb{R}^N , è continua. Una distribuzione T è un funzionale $\varphi \rightarrow T(\varphi)$ continuo e lineare su ogni \mathcal{D}_K spazio degli elementi di \mathcal{D} (spazio delle funzioni test a supporto compatto), i cui supporti sono contenuti nell'insieme compatto K .

Definizione 6 (Supporto di una distribuzione). Si dice che una distribuzione si annulla in un aperto Ω di \mathbb{R}^N se $T(\varphi) = 0$ per qualunque $\varphi \in \mathcal{D}$, con supporto in Ω e che due distribuzioni T_1 e T_2 sono uguali in Ω se $T_1 - T_2 = 0$. Questa definizione permette di considerare le distribuzioni proprio come le misure o le funzioni: da un punto di vista locale. Possiamo per esempio confrontare una distribuzione T con una funzione integrabile. Consideriamo per esempio la funzione f così definita nel caso unidimensionale:

$$f = \begin{cases} g(t) & \text{se } a \leq t \leq b \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

La funzione f definisce una distribuzione F e si dice che $f(t) = T(t)$ in (a, b) se la distribuzione differenza $T - F$ si annulla in (a, b) per $\forall \varphi(t)$

a supporto compatto in $[a, b]$. L'annullarsi o meno di $T - F$ in (a, b) non dipende dall'estensione scelta di f a tutto \mathbb{R} . Nel caso della delta di Dirac, $\langle \delta, \varphi \rangle$ si annulla in ogni intervallo aperto non contenente l'origine, dunque si scrive:

$$\delta(t) = 0 \quad \forall t \neq 0$$

Non si presuppone, cioè, l'esistenza di un valore $\delta(t)$ per $t = 0$.

L'insieme aperto, unione degli intervalli aperti sui quali una distribuzione T si annulla è detto insieme nullo di T . Il complementare Ω dell'insieme nullo è detto *supporto della distribuzione*.

Proprietà.

Moltiplicazione di distribuzioni.

Il prodotto di due distribuzioni non può essere definito in generale; è però possibile definire il prodotto di una distribuzione per una funzione infinitamente derivabile. Si definisce il prodotto di una distribuzione arbitraria T per una funzione $a(x)$ infinitamente derivabile su tutto \mathbb{R}^N come la distribuzione che associa ad ogni $\varphi \in \mathcal{D}$ il numero che la distribuzione T associa al prodotto $a\varphi$:

$$\langle aT, \varphi \rangle = \langle T, a\varphi \rangle$$

Nel caso della delta di Dirac per esempio potremmo avere:

$$\langle a\delta, \varphi \rangle = \langle \delta, a\varphi \rangle = a(0)\varphi(0) = a(0)\delta$$

Si ha inoltre che condizione necessaria e sufficiente perchè una distribuzione T su \mathbb{R} soddisfi la condizione $a(x)T = 0$, dove $a(x)$ è una funzione infinitamente derivabile con un unico zero semplice nell'origine è che T sia proporzionale alla distribuzione δ .

Proposizione 4.1.2. *Sia $T(x)$ una distribuzione tale che $xT(x) = 0$. Allora esiste $c \in \mathbb{R}$ tale che $T(x) = c\delta_0(x)$.*

Dimostrazione. Supponiamo che T sia una distribuzione a supporto compatto tale che $xT(x) = 0$ e consideriamo una $\phi \in \mathcal{C}^\infty$ t.c. $\phi(0) = 0$. Allora

$\Psi(x) = \frac{\phi(x)}{x} \in \mathcal{C}^\infty$ (estendendola per continuità in $x = 0$). Abbiamo quindi che:

$$\langle T(x), \phi(x) \rangle = \langle T(x), x\Psi(x) \rangle = \langle xT(x), \Psi(x) \rangle = 0$$

Sia ora $\phi \in \mathcal{D}$ qualsiasi. Allora $\phi(x) - \phi(0) \in \mathcal{C}^\infty$ e si annulla in 0, e quindi:

$$0 = \langle T(x), \phi(x) - \phi(0) \rangle = \langle T(x), \phi(x) \rangle - \phi(0) \langle T, 1 \rangle$$

Il che implica

$$\langle T(x), \phi(x) \rangle = \langle T, 1 \rangle \phi(0)$$

cioè che $T(x) = c\delta_0$ con $c = \langle T, 1 \rangle$. □

Distribuzioni positive.

Si dice che una distribuzione T è reale se $T(\varphi)$ è reale per φ reale $\in \mathcal{D}$. Inoltre se scriviamo la distribuzione come somma della sua parte reale e della sua parte immaginaria: $T(\varphi) = T_1(\varphi) + iT_2(\varphi)$ si dice che la distribuzione $T \geq 0$, cioè è positiva, se $T(\varphi) \geq 0$ quando $\varphi \in \mathcal{D}$ è ≥ 0 . Si dice, invece, che una distribuzione T_1 è maggiore di T_2 se $T_1 - T_2 \geq 0$ per $\varphi \geq 0$.

4.2 Derivata di una distribuzione

Nella derivazione di una distribuzione cerchiamo di far corrispondere ad ognuna delle distribuzioni T delle distribuzioni alle derivate parziali. Si scriverà, dunque, per $n = 1$, $T' = \frac{dT}{dx}$ e per $n = k$, $T'_{x_k} = \frac{\partial T}{\partial x_k}$. Perchè questa notazione abbia senso, però, è necessario che se T è una funzione f continua alle derivate parziali continue nel senso usuale del termine valga:

$$\frac{\partial T}{\partial x_k} = \frac{\partial f}{\partial x_k}$$

Dimostrazione.

Per $\varphi \in (D)$:

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}(\varphi) = \iint \dots \int \frac{\partial f}{\partial x_k}(x_1, \dots, x_k, \dots, x_n) \varphi(x_1, \dots, x_k, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_k \dots dx_n =$$

$$= \int \dots \int dx_1 \dots dx_{k-1} dx_{k+1} \dots dx_n \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial x_k} \varphi dx_k \right)$$

Calcoliamo l'integrale tra parentesi tramite l'integrazione per parti:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial x_k} \varphi dx_k = - \int_{-\infty}^{+\infty} f \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} dx_k$$

Allora risulterà:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x_k}(\varphi) &= - \int \dots \int dx_1 \dots dx_{k-1} dx_{k+1} \dots dx_n \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} dx_k \right) = \\ &= - \iiint \dots \int f \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} dx \end{aligned}$$

E dunque:

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}(\varphi) = -f\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_k}\right)$$

Definizione 7 (Derivata di una distribuzione). La relazione sopra individuata tra f e $\frac{\partial f}{\partial x_k}$ rimane valida se al posto di f consideriamo una distribuzione qualunque T . Infatti, se prendiamo il funzionale

$$S(\varphi) = -T\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_k}\right)$$

questo è chiaramente una forma lineare su (D) e continua su ogni (D_k) , dove con (D_k) si intende lo spazio degli elementi di (D) , i cui supporti sono contenuti nell'insieme compatto K . Ora, presi $\varphi_j \in (D)$ convergenti a zero: $\varphi_j \mapsto 0$, anche le loro derivate parziali rispetto a x_k convergono a zero: $\frac{\partial \varphi_j}{\partial x_k} \mapsto 0$. Dunque, dato che T è continua su (D_k) anche $-T\frac{\partial \varphi_j}{\partial x_k}$ converge a zero.

S è allora una nuova distribuzione e $S = \frac{\partial T}{\partial x_k}$ dove:

$$\frac{\partial T}{\partial x_k}(\varphi) = -T\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_k}\right)$$

o analogamente

$$T'_{x_k}(\varphi) = -T(\varphi'_{x_k})$$

□

Una volta definita la nozione di derivata si può estendere il ragionamento alle derivate di ordine successivo. Prendiamo per esempio la derivata seconda: $\frac{\partial^2 T}{\partial x_k \partial x_h}$ si ha che

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x_k \partial x_h}(\varphi) = +T\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_h \partial x_k}\right)$$

infatti indicando le distribuzioni con la notazione del prodotto scalare e applicando la definizione di derivata:

$$\left\langle \frac{\partial^2 T}{\partial x_k \partial x_h}, \varphi \right\rangle = - \left\langle \frac{\partial T}{\partial x_h}, \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} \right\rangle = + \left\langle T, \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_k \partial x_h} \right\rangle$$

Generalizzando si ottiene la relazione seguente:

$$D^p T(\varphi) = (-1)^{|p|} T(D^p \varphi)$$

che ci permette di affermare due cose: primo che ogni distribuzione è infinitamente derivabile e le sue derivate sono ancora distribuzioni, secondo che l'ordine di derivazione è invertibile, dato che lo è quello per le derivate di $\varphi \in (\mathcal{D})$.

Bisogna però notare che così una funzione sommabile sembra infinitamente derivabile, ma se non ha derivata nel senso usuale questo vuol dire che la sua derivata non è una funzione o una misura, ma è una distribuzione. Bisogna cioè non confondersi tra i diversi concetti di derivata¹.

La derivazione è un'operazione di carattere locale. Se si conosce una distribuzione in un aperto $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ senza conoscerla in tutto \mathbb{R}^N si conoscono tutte le sue derivate in Ω e il supporto delle distribuzioni derivate di T è contenuto nel supporto di T . La derivata distribuzionale gode di molte proprietà simili a quelle della derivata di funzioni.

¹**Diversi concetti di derivata.**

1. Derivata in senso classico f' ovvero il limite puntuale del rapporto incrementale;
2. derivata debole per funzioni $f \in L^1_{loc}$;
3. derivata nel senso delle distribuzioni, denotata D per ogni $T \in \mathcal{D}'$.

Quando la derivata classica esiste solo per quasi ogni $x \in \mathbb{R}$, viene detta derivata quasi ovunque. Si noti che la derivata nel senso delle distribuzioni esiste sempre, mentre ciò non vale per le altre derivate.

Proposizione 4.2.1 (Proprietà della derivazione). *Per qualunque distribuzione $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ valgono le seguenti proprietà:*

1. $(\lambda T)' = \lambda T' \quad \lambda \in \mathbb{R}$
2. $(gT)' = gT' + g'T \quad \forall g \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$
3. $T(\lambda)' = \lambda T'(\lambda) \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}$

Dimostrazione. Si dimostrano tutte applicando ripetutamente le formule di derivazione e di moltiplicazione di una distribuzione. Dimostriamo in particolare la 2, dato che si può poi estendere alle derivate di ordine successivo fornendo una formula nota con il nome di *Regola di Leibniz*.

Avremo:

$$\begin{aligned} \langle (gT)', \varphi \rangle &= - \langle gT, \varphi' \rangle = \langle T, g\varphi' \rangle = \\ &= - \langle T, (g\varphi)' \rangle + \langle T, g'\varphi \rangle = \langle T', g\varphi \rangle + \langle g'T, \varphi \rangle = \langle gT' + g'T \rangle \\ &\quad \forall \varphi \in \mathcal{D}. \quad \square \end{aligned}$$

Proposizione 4.2.2 (Regola di Leibniz). *Per ogni distribuzione $T \in \mathcal{D}$ vale che:*

$$D^n(gT) = \sum_{m=1}^n \binom{n}{m} (D^{n-m}g)D^mT \quad \forall g \in \mathcal{C}^\infty, \forall T \in \mathcal{D}, \forall n, m \in \mathbb{N}$$

Poniamoci ora nel caso di una variabile reale e vediamo alcuni esempi di derivazione.

Esempio 4.2.3 (Funzioni discontinue. La funzione $Y(x)$ di Heaviside).

Si chiama funzione gradino di Heaviside la funzione:

$$Y(x) = \begin{cases} 0 & \text{per } x < 0 \\ +1 & \text{per } x > 0 \end{cases}$$

Come si vede dalla definizione la funzione di Heaviside (vedi fig. 4.1) non è definita per $x = 0$, ma non è importante perchè se la consideriamo come

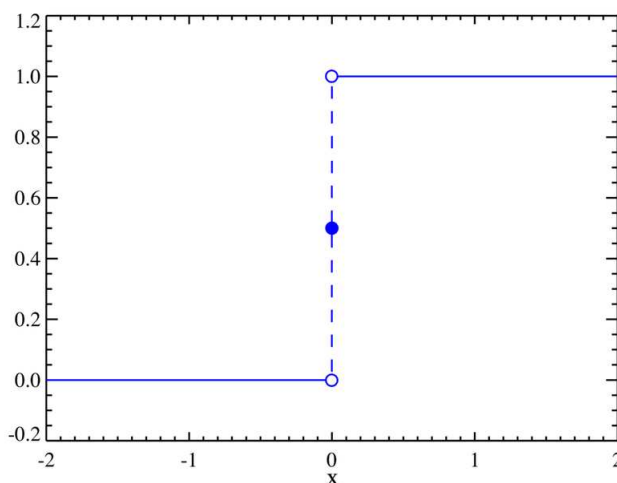


Figura 4.1: La funzione di D'Heaviside

distribuzione è sufficiente che sia definita quasi dappertutto. Proviamo ora a calcolare la derivata della funzione di Heaviside per $\varphi \in \mathcal{D}$. Abbiamo che

$$Y(\varphi) = \int_0^{+\infty} \varphi(x) dx$$

allora delle regole di derivazione delle distribuzioni segue che:

$$Y'(\varphi) = Y(\varphi') = - \int_0^{\infty} \varphi' dx = \varphi(0)$$

Ricordando ora la definizione della delta di Dirac, si nota immediatamente che:

$$\delta(\varphi) := \langle \delta, \varphi \rangle = \varphi(0) \Rightarrow Y'(\varphi) = \varphi(0) = \delta(\varphi)$$

Dunque:

$$Y' = \delta$$

la derivata della funzione gradino di Heaviside è la delta di Dirac. La derivata di $Y(x)$ non esiste nel senso classico del termine per $x = 0$. Nel senso delle distribuzioni però tale derivata esiste ed è proprio la delta di Dirac. Ora così come abbiamo calcolato la derivata prima possiamo procedere nella derivazione e calcolando le derivate successive:

$$Y''(\varphi) = \delta'(\varphi) = -\delta(\varphi') = \varphi'(0)$$

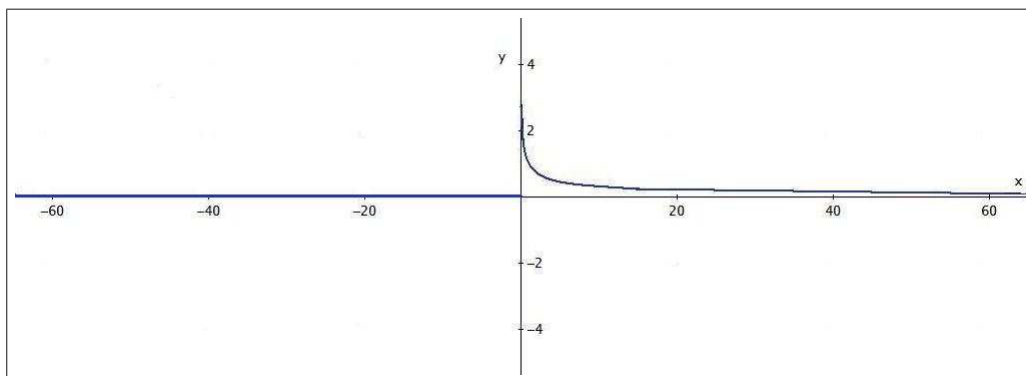


Figura 4.2: Pseudofunzioni. Le parti finite di Hadamard

mentre le derivate di ordine maggiore sono ricavabili da:

$$\delta^{(p)}(\varphi) = (-1)^p \varphi^{(p)}(0).$$

Esempio 4.2.4 (Pseudofunzioni. Le parti finite di Hadamard).

Calcoliamo la derivata della seguente funzione:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{per } x < 0 \\ \frac{1}{\sqrt{x}} & \text{per } x > 0 \end{cases}$$

Avremo sicuramente:

$$f'(x) = \begin{cases} 0 & \text{nell'aperto } (-\infty, 0) \\ -\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}} & \text{nell'aperto } (0, +\infty) \end{cases}$$

perchè in ognuno degli aperti $f(x)$ è una funzione continua a derivata continua. Consideriamo ora $\varphi \in \mathcal{D}$ e la derivata $f'(\varphi)$, segue dalla definizione di derivata di una distribuzione che:

$$f'(\varphi) = -f(\varphi') = -\int_0^{+\infty} \varphi'(x)x^{-\frac{1}{2}}dx = -\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_0^{+\infty} \varphi'(x)x^{-\frac{1}{2}}dx$$

Integrando per parti otteniamo:

$$f'(\varphi) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[\frac{\varphi(\epsilon)}{\sqrt{\epsilon}} + \int_{\epsilon}^{+\infty} \varphi(x) \left(\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}} \right) dx \right]$$

Ora dato che per $\epsilon \rightarrow 0$ si ha che $\varphi(\epsilon) = \varphi(0) + O(\epsilon)$ si ha infine:

$$f'(\varphi) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[\int_{\epsilon}^{+\infty} \varphi(x) \left(-\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}\right) dx + \varphi(0)\epsilon^{-\frac{1}{2}} \right]$$

Questa è la nozione, introdotta da Hadamard nella teoria delle equazioni alle derivate parziali, di "parte finita" di un integrale divergente.

Sia g una funzione sommabile in tutto l'intervallo $(a+\epsilon, b)$, ma non sommabile in (a, b) . Può accadere che $g(x)$ sia la somma di un polinomio in $\frac{1}{x-a}$ e di una funzione $h(x)$ sommabile in (a, b) .

$$g(x) = P\left(\frac{1}{(x-a)}\right) + h(x)$$

Possiamo allora vedere l'integrale di $g(x)$ come somma di $I(\epsilon)$ e $F(\epsilon)$, che sono rispettivamente la "parte infinita" e la parte "finita" dell'integrale.

$$\int_{a+\epsilon}^b g(x) dx = I(\epsilon) + F(\epsilon)$$

4.3 Primitiva di una distribuzione

Analogamente alla definizione di derivata di una distribuzione Schwartz diede quella di primitiva.

Definizione 8 (Primitiva di una distribuzione.). Data una distribuzione S , si dice primitiva della distribuzione una distribuzione T che soddisfa alla condizione:

$$\langle T', \psi \rangle = \langle S, \psi \rangle \quad \forall \psi \in \mathcal{D}$$

Dalla definizione segue che:

$$\langle T, \psi' \rangle = - \langle S, \psi \rangle \quad \forall \psi \in \mathcal{D}$$

e ponendo $\chi = \psi'$

$$\langle T, \chi \rangle = - \langle S, \psi \rangle$$

Teorema 4.3.1. *Tutte le distribuzioni ad una variabile ammettono un'infinità di primitive che differiscono a meno di una funzione costante.*

Dimostrazione.

Sia S una distribuzione data. Perchè una distribuzione T sia primitiva di S è necessario e sufficiente che per tutta la funzione $\chi \in (D)$, che è la derivata di una funzione $\psi \in (D)$, si abbia:

$$T(\chi) = T\left(\frac{d\psi}{d\chi}\right) = -S(\psi).$$

Queste funzioni χ sono derivate esatte e formano un sottospazio vettoriale, più esattamente un iperpiano di \mathcal{D} che si indicherà H . Soddisfano infatti alla condizione di linearità $\int_{-\infty}^{+\infty} \chi(t)dt = 0$. Inoltre la distribuzione T è un funzionale lineare noto su H ed è definita su \mathcal{D} una volta che si è fissato il suo valore $\langle T, \varphi_0 \rangle$ per un elemento $\varphi_0 \in \mathcal{D}$ che però non sta in H .

Scegliamo per esempio φ_0 t.c.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_0(t)dt = 1$$

Ora $\forall \varphi \in \mathcal{D}$ possiamo scrivere:

$$\varphi = \lambda\varphi_0 + \chi$$

con

$$\lambda = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t)dt$$

e

$$\chi = \varphi - \lambda\varphi_0 \in H$$

Infatti deve risultare che:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (\varphi - \lambda\varphi_0)dt = 0$$

da cui

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (\varphi)dt - \lambda \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_0 dt = 0$$

ma il secondo integrale è uguale a uno, dunque segue che

$$\lambda = \int_{-\infty}^{+\infty} (\varphi(0))dt$$

Allora segue:

$$\langle T, \varphi \rangle = \langle \lambda T, \varphi_0 \rangle + \langle T, \chi \rangle$$

e dunque

$$\langle T, \varphi \rangle = \langle \lambda T, \varphi_0 \rangle - \langle S, \psi \rangle$$

Rimane ora da dimostrare che $\langle T, \varphi \rangle$ è continua su \mathcal{D} . Basta verificare che la distribuzione T converge a zero quando φ converge a zero su ogni compatto D_k .

T è continua su $H \cap D_k$: infatti, se $\chi \in H \cap D_k$ converge a zero su D_k , la sua primitiva ψ converge a zero su D_H , dove H è il più piccolo intervallo contenente K compatto, e perciò $\langle S, \psi \rangle$ converge a zero. Bisogna però vedere che quando $\varphi \mapsto 0$ segue che $\chi \mapsto 0$. Questo però è vero perchè $\chi = \varphi - \lambda\varphi_0$ e allora quando $\varphi \mapsto 0$ segue che $\lambda \mapsto 0$ e di conseguenza $\chi \mapsto 0$ su $(H) \cap (D_l)$, dove D_l è l'unione del supporto di φ_0 e di K . Ora possiamo provare la tesi. Infatti quando $\varphi \mapsto 0$ su D_k anche $\langle T, \varphi \rangle \mapsto 0$ perchè l'avevamo definita come $\langle T, \varphi \rangle = \langle \lambda T, \varphi_0 \rangle + \langle T, \chi \rangle$.

Quindi T è primitiva di S , infatti:

$$- \langle S, \psi \rangle = \langle T, \varphi \rangle - \langle \lambda T, \varphi_0 \rangle = \langle T, \varphi - \lambda\varphi_0 \rangle = \langle T, \chi \rangle$$

Infine la differenza tra due primitive T_1, T_2 dipende esclusivamente da una diversa scelta di $\langle T, \varphi_0 \rangle$, perciò:

$$\langle T_1, \varphi \rangle = \lambda \langle T_1, \varphi_0 \rangle - \langle S, \psi \rangle$$

$$\langle T_2, \varphi \rangle = \lambda \langle T_2, \varphi_0 \rangle - \langle S, \psi \rangle$$

facendo la differenza si ottiene

$$\langle T_1, \varphi \rangle - \langle T_2, \varphi \rangle = \langle T_1 - T_2, \varphi_0 \rangle = \lambda C$$

con C costante. Segue poi immediatamente la tesi:

$$\lambda C = \int_{-\infty}^{+\infty} C\varphi(t) dt$$

□

Si nota che per scegliere una primitiva particolare T , si fissa il suo valore per una $\varphi_0 \in \mathcal{D}$, così come usualmente per scegliere una primitiva particolare di una funzione si fissa il suo valore in un punto x_0 particolare. Come conseguenza del teorema precedente allora segue che:

Corollario 4.3.2. *Una distribuzione la cui derivata è nulla, è generata da una funzione costante.*

Dimostrazione.

Se T ha derivata nulla segue che $\langle S, \psi \rangle = 0$ e quindi che

$$\langle T, \varphi \rangle = \langle \lambda T, \varphi_0 \rangle = \lambda \langle T, \varphi_0 \rangle = \lambda F$$

con $F = \langle T, \varphi_0 \rangle$ distribuzione generata dalla funzione costante F . \square

Si può inoltre osservare che quando una distribuzione ha derivata nulla in un aperto Ω essa è uguale a una funzione costante f in ogni parte connessa dell'aperto. Tale costante però non è necessariamente uguale in tutto Ω . Possiamo prendere infatti come esempio la distribuzione di Heaviside Y :

$$Y(x) = \begin{cases} 0 & \text{per } x < 0 \\ +1 & \text{per } x > 0 \end{cases}$$

che ha derivata nulla nell'aperto complementare dell'origine, formato da due insiemi aperti connessi.

Si dice inoltre che la primitiva di ordine p è, secondo la definizione di primitiva di una distribuzione, la primitiva della primitiva di ordine $p-1$. Segue dunque il corollario seguente.

Corollario 4.3.3. *Ogni distribuzione ammette una infinità di primitive di ordine p ; che differiscono tra loro a meno di un polinomio di grado $\leq (p-1)$.*

Definizione 9 (Ordine di una distribuzione.). Una distribuzione T è detta di ordine $m \geq 0$ se m è il minimo intero per il quale essa risulta, su ogni insieme finito, la derivata m -esima, nel senso delle distribuzioni, di una funzione localmente sommabile.

La teoria delle distribuzioni, ovviamente, non si esaurisce con quanto trattato in questo capitolo. Schwartz fece una trattazione molto approfondita, passando da una dimensione a n -dimensioni, trattando operazioni particolari come la convoluzione di distribuzioni, studiando il legame esistente tra distribuzioni e trasformate di Fourier e Laplace, solo per citare alcuni degli approfondimenti. Nonostante questo, però, già da questi pochi aspetti fondamentali è possibile cogliere l'importanza di questo studio.

Conclusioni

Questo approfondimento ci permette di trarre tre importanti considerazioni finali.

Prima tra tutte possiamo rispondere alla domanda: "Da chi e quando furono inventate le distribuzioni?"

Le distribuzioni furono scoperte da Sobolev nel 1936, ma il merito di aver costruito una solida teoria delle distribuzioni è da attribuirsi a Laurent - Schwartz con l'opera dal titolo "*Théorie des distributions*" nel 1950 – 1952. Schwartz fu il primo ad intuire le potenzialità di una simile teoria e a capirne le conseguenze. La nascita della teoria delle distribuzioni contribuì non solo ad ampliare la teoria delle equazioni alle derivate parziali, ma anche allo sviluppo di un nuova branca della matematica, quella dell'analisi funzionale. A questo proposito si può inoltre affermare che la maggior parte dei matematici contemporanei a Schwartz ben accettarono la teoria; in particolar modo i fisici che finalmente potevano usare le cosiddette funzioni 'patologiche' come la delta di Dirac con rigore. André Weil, iniziatore del gruppo dei bourbakisti, scrive riguardo a questo:

"Il y a là (nella teoria delle distribuzioni) peut-être le principe d'un calcul nouveau, qui nous rendra accessible les relations entre opérateurs différentiels et opérateurs intégraux... Dans ces recherches, on voit peut-être s'ébaucher un calcul opérationnel destiné à devenir d'ici un siècle ou deux un instrument aussi puissant que l'a été pour nos prédécesseurs et pour nous-mêmes le calcul différentiel."

Infine, non si può evitare di notare come nella formulazione della teoria abbia giocato un ruolo importante la fisica-matematica. Il periodo antecedente alla formulazione della teoria è stato segnato da piccoli problemi particolari, come quello della delta di Dirac o dell'equazione della corda vibrante, che erano 'problemi' che i matematici in qualche modo dovevano risolvere perchè chi applicava la matematica, i fisici e gli ingegneri del tempo per esempio, nonostante il loro utilizzo non fosse matematicamente corretto e non corrispondesse al rigore matematico, li utilizzavano.

Spinta per lo sviluppo matematico, dunque, non fu solo la volontà di dare rigore all'analisi e di generalizzare il concetto di funzione, ma anche la necessità di risolvere problemi di tipo pratico.

Bibliografia

- [1] L. SCHWARTZ, *Theorie des distributions*, Paris, Hermann, 1950 – 51.
- [2] U. BOTTAZZINI, *Il flauto di Hilbert*, Torino, UTET, 1990.
- [3] V.S. VLADIMIROV, *Le distribuzioni nella fisica matematica*, Roma, Editori Riuniti, 1981.
- [4] C. B. BOYER, *Storia della matematica*, Milano, ISEDI, 1976.
- [5] J. LÜTZEN, *The prehistory of the distributions*, New York-Berlin, Springer-Verlag, 1982.
- [6] E. LANCONELLI, *Lezioni di analisi 1*, Bologna, Pitagora, 1998.
- [7] E. LANCONELLI, *Lezioni di analisi 2*, Bologna, Pitagora, 2000.
- [8] E. DIBENEDETTO, *Partial Differential Equations*, Boston, Birkhauser, 1995.
- [9] E. BELARDINELLI, C.BONIVENTO, *Elementi di teoria delle distribuzioni*, Bologna, Patron, 1968.
- [10] J. MIKUSINSKY, *Theory of distributions*, Amsterdam, Elsevier Publishing Company, 1973.
- [11] J. BELTRAMI, *Distributions and the Boundary value of Analytic function*, New York-London, Academic Press, 1966.

- [12] M. KLINE, *Storia del pensiero matematico*, Volume I, Torino, Einaudi, 1991.
- [13] M. KLINE, *Storia del pensiero matematico*, Volume II, Torino, Einaudi, 1991.
- [14] A. MALARA, *Il concetto di funzione: aspetti epistemologici e didattici*.
- [15] R. NARDINI, *Complementi di istituzioni di fisica matematica*, Bologna, CLUE, 1982.
- [16] G. EVANS, *Analytic methods for partial differential equation*, New York-Berlin, Springer-Verlag, 2001.

Ringraziamenti

Un grazie di cuore a chiunque mi è stato vicino, sia a chi mi ha fatto ridere che a chi mi ha fatto piangere, perchè ognuno nel suo piccolo mi ha fatto diventare la persona che sono. Grazie al Professor Lanconelli, per la disponibilità e per avermi dato la possibilità di svolgere questa tesi e seguire così la mia curiosità su questo argomento. Grazie alla mia famiglia, ai miei genitori che mi hanno permesso di arrivare fino a qui e mi hanno fatto - coraggio, alla mia impareggiabile sorella e a Daniele, alle nonne, ai nonni, agli zii e alla zia, alla Sara e a Luca, a chiunque ha fatto parte della mia vita fino ad ora! Grazie alle incredibili ragazze del convi. Alla Vero e all'Eli, uniche divise e una forza insieme, alla Cesca e alla Tina, che cercano di insegnarmi il veronese, all'Angy, che nonostante i suoi mille impegni c'è sempre, alla Mery, all'Anna e all'Alice (da leggersi Elis) e poi all'Agnese, alla Roby, alla Chiara...insomma grazie a tutte!!! Grazie ad Anne and Anne, certamente guide spirituali, ma, in fondo, anche un po' una specie di terza e quarta nonna: "mmm...hai il faccino stanco, ma hai mangiato?" E per ultima, ma non ultima, grazie alla Lu, unica e inimitabile, grande compagna di stanza e incredibile amica, che è riuscita a sopportarmi per questi tre anni e spero mi sopporterà ancora nei prossimi. Vicina da sempre a quanto mi ricordo, che mi ha fatto capire l'importanza dell'essere autentici nella vita e non una copia sbiadita di se stessi, che i brutti periodi passano e che quelli belli in compagnia valgono il doppio. Grazie a chi ho incontrato attraverso la matematica: Lidia, Stefano, Giacomo, Fabrizio, Andrea...purtroppo non posso nominarvi tutti, ma in particolare grazie a Marta, Michela e Valeria.

Non solo colleghe fantastiche, ma grandi amiche. Non so come avrei fatto senza di voi! Grazie a Nicolò per la gentilezza e la disponibilità con la quale mi ha aiutato, alla Miriam e alla Sere, lontane ma vicine e grazie alla Sofy, alla Fra, a Genio, Dade, Dokka, la Vale, l'Ale, sui quali so di poter sempre contare e per i quali ci sarò sempre. Ora, sperando di non aver dimenticato nessuno, finisco dicendo che credo che nella vita ci siano due famiglie per ognuno di noi, una ti è data, come un dono, un regalo che non si può nè scegliere nè cambiare, ma che però si può vivere. Io, sono stata fortunata, due volte, amo la mia Famiglia e farne parte, ma ho anche un altro gruppo di persone delle quali non posso fare a meno, la seconda famiglia, che mi è stata accanto nei momenti difficili e nelle gioie. Vi voglio ringraziare, Amici, con la A maiuscola, voi che ci siete sempre stati e che mi siete vicino.

Dunque: "Grazie, alle mie famiglie."